Version 08.02.2008 Januar 2008

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung
Martin Schottenloher

$\infty \infty \infty$

Kapitel XIV. Integration auf Mannigfaltigkeiten – Integralsätze

Die beiden Themen des Kapitels
– Integration auf (Unter-) Mannigfaltigkeiten
– Integralsätze
sind eng miteinander verwoben, und so sollen sie im Folgenden auch dargestellt werden. Wir beginnen mit den Integralsatz von Green (in der Ebene) im Paragrafen 50, verallgemeinern diesen Satz zum Satz von Stokes auf Flächen, und führen dabei im Paragraphen 51 die Integration auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ und allgemeiner auf k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ein. Schließlich formulieren wir in $\S$ 52 den Satz von Gauß, der es erlaubt, das Integral über eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ unter guten Voraussetzungen an den Rand von Ω auf ein entsprechendes Integral über den Rand (als $(n-1)$-dimensionale) Untermannigfaltigkeit zurückzuführen.

Damit sind die klassischen Integralsätze (der Vektoranalysis) erst einmal eingeführt und bewiesen. Für die weitere Behandlung aller Integralsätze, die letztlich die Form

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

haben (auch der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung), muss der Kalkül der Differentialformen eingeführt werden. Mit Hilfe dieses Werkzeugs wird dann der allgemeine Satz von Stokes formuliert und bewiesen.

§50 Integralsatz von Green

In der Literatur heißt der Satz auch „Satz von Gauß in der Ebene“. Bewiesen wurde er zum ersten Mal von B. Riemann, bekannt geworden ist er vor allem aufgrund einer Arbeit aus dem Jahre 1828 von George Green, einem Müllermeister aus Nottingham.

(50.1) Satz: (Satz von Green für Rechtecke) *Auf $R = [a,b] \times [c,d]$ sei ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld $F = (P,Q) : R \to \mathbb{R}^2$ gegeben (d.h. F ist die Restriktion eines $\mathcal{C}^1$-Vektorfeldes auf einer offenen Umgebung von R). Dann gilt:*

$$\int_{\partial R} \langle F, dx \rangle = \int_{\partial R} P\,dx + Q\,dy = \int_R (Q_x - P_y)\; d\lambda_2\,.$$

Dabei ist mit ∂R unter dem Integralzeichen der orientierte Rand als Weg gemeint. Genauer: Die vier Kurvenstücke

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (t, c)\,, & a \le t \le b\,, \\ \beta(t) &= (b, t)\,, & c \le t \le d\,, \\ \gamma(t) &= (a+b-t, d)\,, & a \le t \le b\,, \\ \delta(t) &= (a, c+d-t)\,, & c \le t \le d\,, \end{aligned}$$

werden zusammengesetzt (addiert) und liefern die (richtig orientierte) stückweise $\mathcal{C}^1$-Parametrisierung des Randes ∂R. Der Beweis des Satzes ergibt sich direkt durch mehrfache Anwendung des Hauptsatzes.

(50.2) Hilfssatz: *Es seien $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige und rektifizierbare Funktionen (also stetige Funktionen von beschränkter Variation, vgl. Definition 25.5) mit $g \le h$. Sei*

$$B := \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : g(x) \le y \le h(x)\}\,.$$

(*Ein solcher Bereich wird* Normalbereich in Bezug auf die x-Achse *genannt,* vgl. Abb. 50.1.) Ist $P : B \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar nach y und P_y integrierbar, so gilt

$$-\int_B P_y(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_{\partial B} P\, dx\,.$$

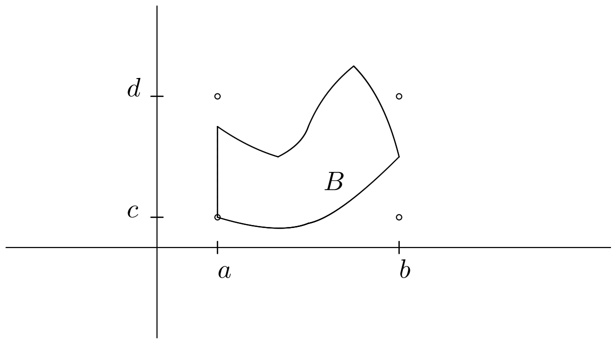

Abb. 50.1: B ist Normalbereich in Bezug auf die x-Achse.

Als Beispiele von stetigen Funktionen mit beschränkter Variation sind in erster Linie die stückweise stetig differenzierbaren Funktionen zu nennen.

Wir wollen das zu (50.2) analoge Resultat $\int_{\partial B} Q\, dy = \int_B Q_x\, d\lambda_2$ für Normalbereiche B bezüglich der y-Achse anwenden, um ein allgemeines Resultat für Bereiche zu erzielen, die Normalbereiche bezüglich der x-Achse und der y-Achse zugleich sind.

Beispielsweise ist jede Kreisscheibe $B \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich in Bezug auf die x-Achse und in Bezug auf die y-Achse, und das gilt ebenso für konvexe Bereiche mit genügend glattem Rand. Für das gezeichnete Beispiel B oben gilt das nicht. B ist nicht Normalbereich in Bezug auf die y-Achse. Aber dieses Beispiel kann in 2 Bereiche zerlegt werden, die beide Normalbereiche in Bezug auf die x-Achse und in Bezug auf die y-Achse sind (vgl. Abb. 50.2). Für B_1 und B_2 erhält man dann jeweils das gewünschte Resultat (Satz 50.3), welches daher auch für B gilt.

(Die Integrale über den doppelt durchlaufenen Weg löschen sich aus.)

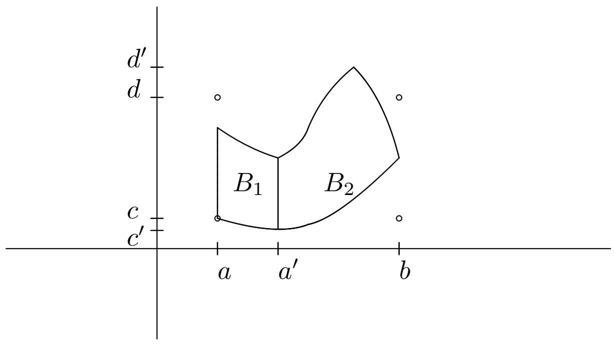

Abb. 50.2: B ist zerlegt in B_1 , B_2, die beide Normalbereiche in Bezug auf die x-Achse und auf die y-Achse sind. Und es gilt:

$$\int_{\partial B}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{\partial B_1}(P\,dx+Q\,dy)+\int_{\partial B_2}(P\,dx+Q\,dy)\,,$$

wenn die Ränder jeweils positiv orientiert durchlaufen werden.

(50.3) Satz: (Integralsatz von Green) *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ offen und $B=\overline{\Omega}$ ein Normalbereich bezüglich der x-Achse und der y-Achse. Sei $F=(P,Q):B\to\mathbb{R}^2$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld. Dann*

$$\int_{\partial\Omega}\langle F,dx\rangle=\int_{\partial\Omega}P\,dx+Q\,dy=\int_{\Omega}(Q_x-P_y)\,d\lambda_2\,.$$

Dabei ist $\partial\Omega$ positiv zu durchlaufen.

Dieselbe Formel gilt für ein Ω, das sich aus endlich vielen Normalbereichen zusammensetzt.

Dieselbe Formel gilt weiterhin für eine beschränkte, offene Teilmenge $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, wenn der Rand $\partial\Omega$ von Ω eine stückweise stetig differenzierbare und stückweise reguläre Parametrisierung besitzt.

Im letzten Fall lässt sich der Rand durch endlich viele Graphen von $\mathcal{C}^1$-Funktionen beschreiben. Man kann Ω daher in endlich viele Normalbereiche in Bezug auf die x-Achse und zugleich auf die y-Achse zerlegen, mit jeweils differenzierbaren Begrenzungsfunktionen (vgl. Abb. 50.2), die sich nur in den Rändern schneiden, und die Aussage folgt aus dem Satz für Normalbereiche.

(50.4) Anwendungen:

1° $F=(P,Q)$ sei Potentialfeld auf einer offenen Menge Σ, d.h. $P=U_x$, $Q=U_y$, für ein Potential $U:\Sigma\to\mathbb{R}$. Dann ist $Q_x-P_y=0$, jedenfalls immer dann, wenn U zweimal stetig differenzierbar ist. Für Ω mit gutem Rand wie in 50.3 und $\overline{\Omega}\subset\Sigma$ gilt daher nach Satz 50.3:

$$\int_{\partial\Omega}\langle F,dx\rangle=0\,,$$

das heißt, das Wegintegral über die geschlossene Kurve $\partial\Omega$ ist immer Null. Das wussten wir schon aus der Diskussion in MIIA, vgl. Paragraf 30, insbesondere Satz 30.12, denn ein Potentialfeld ist immer konservativ, was sich direkt ergibt, ohne den Umweg über den Satz von Green.

2° Es sei $B=\overline{\Omega}$ Normalbereich, oder der Satz von Green gelte für Ω aus anderen Gründen, z.B. weil der Rand von Ω stückweise stetig differenzierbar und regulär ist. Dann ist der Inhalt $\lambda_2(\Omega)$ durch das folgende Integral ausdrückbar:

$$\lambda(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\,dy-y\,dx)\ .$$

Wichtige Anwendungen des Satzes von Green finden sich in der Funktionentheorie:

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn sie in allen Punkten $z \in \Omega$ stetig komplex differenzierbar ist, wenn also

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} =: f'(z)$$

existiert und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ stetig ist.

Es gilt dann

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f_x(z) = f'(z)\,,$$
$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = -if_y(z) = f'(z)\,.$$

Für holomorphe Funktionen gilt also: Sie sind stetig (reell) partiell differenzierbar mit $f_x + if_y = 0$.

Wenn wir $f = u + iv$ schreiben mit $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$, dann erfüllen Real- und Imaginärteil u, v von f also im Falle der Holomorphie die so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CR-DGln):

$$u_x = v_y\ ,\ u_y = -v_x\ .$$

(50.5) Satz: *$f = u + iv$ sei stetig partiell differenzierbar als reelle Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *f ist holomorph.*

2° *u, v erfüllen die CR-DGln.*

3° *Die Jacobi-Matrix*

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

wirkt als komplexe Multiplikation.

Zur Erinnerung: Das komplexe Kurvenintegral für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und eine stetige Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt\,.$$

Mit $\gamma = \alpha + i\beta$ also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \Big(u(\gamma(t))\dot\alpha(t) - v(\gamma(t))\dot\beta(t)\Big)\ dt + i\int_a^b \Big(v(\gamma(t))\dot\alpha(t) + u(\gamma(t))\dot\beta(t)\Big)\ dt\,,$$

und das ist die folgende Kombination von zwei reellen Kurvenintegralen

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left(\int_\gamma u\,dx - v\,dy\right) + i\left(\int_\gamma v\,dx + u\,dy\right)\ .$$

(50.6) Integralsatz von Cauchy: *Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zu $a \in \Omega$ sei $r > 0$ mit $B = \{z \in \mathbb{C} : |a - z| \le r\} \subset \Omega$. Dann gilt*

$$\int_{\partial B} f(z)\,dz = 0\,.$$

Dabei ist das Integral zu verstehen als das Integral über eine positive orientierte Kurve γ des Randes ∂B. Hier z.B. die Kurve $\gamma(t) = a + r \exp it$, $t \in [0, 2\pi]$, also

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) ire^{it}\, dt = 0 .$$

B ist Normalbereich.

Natürlich verschwindet das komplexe Kurvenintegral für viele weitere geschlossene Kurven. In der Tat für alle geschlossene rektifizierbare Kurven, die sich innerhalb Ω zu einem konstanten Weg stetig deformieren lassen (Homotopie).

(50.7) Integralformel von Cauchy: *Es sei jetzt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig partiell (reell) differenzierbar, und es seien a, r, B, γ wie in 50.6. Dann gilt für alle $z \in \mathring{B}$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_B \frac{\overline{\partial} f(x+iy)}{x + iy - z} d\lambda_2(x, y) .$$

Dabei ist $\overline{\partial} f := \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$, also $\overline{\partial} f = 0$ für holomorphe f. Im holomorphen Fall gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

§51 Integration auf Flächen

Im Folgenden sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ offen (der „Parameterbereich“) und $\psi : Q \to \mathbb{R}^3$ eine injektive stetig differenzierbare Immersion, die topologisch auf das Bild $S := \psi(Q)$ sei, für die also die Umkehrung $\varphi = \psi^{-1} : S \to Q$ stetig ist. Insbesondere ist S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, also eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, und φ ist eine (globale) Karte. S oder ψ heißt auch *Flächenstück* und ψ wird „Parametrisierung“ oder in diesem Fall auch $\mathcal{C}^1$*-Einbettung* genannt. Jede zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M ist aus solchen Flächenstücken wie S zusammengesetzt: Es gibt eine offene Überdeckung $(S_i)_{i\in I}$ von M, und dazu topologische $\mathcal{C}^1$-Immersionen $\psi_i : Q_i \to S_i$ (die Karten $\varphi_i = \psi_i^{-1}$ bilden also eine Atlas). Analog für abstrakte (also nicht in $\mathbb{R}^n$ eingebettete) Flächen wie z.B. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Wie wird die Integration von Q auf S übertragen? (Die Restriktion von $\mathbb{R}^3$ auf S gibt keinen Sinn, die Integration ergibt stets Null, weil S in $\mathbb{R}^3$ eine Nullmenge ist.)

Messbarkeit lässt sich leicht übertragen: Eine Teilmenge $A \subset S$ wird einfach messbar genannt, wenn $\psi^{-1}(A) \subset Q$ lebesguemessbar ist.

Damit ist auf S eine σ-Algebra $\mathcal{L}_S$ definiert, weil ψ bijektiv ist. Und $\mathcal{L}_S$ enthält die Borelalgebra $\mathcal{B}(S)$, weil ψ topologisch ist. Zu einer Integrationstheorie auf S fehlt jetzt ein Maß, die den Messraum $(S, \mathcal{L}_S)$ zu einem Maßraum macht. Es gilt also, einen verallgemeinerten Flächeninhalt

$$\lambda_S(A) \in [0, \infty]$$

für messbare Teilmengen $A \subset S$ zu finden.

Einige heuristische Überlegungen zur geometrischen Bedeutung des Vektors $\psi_1 \times \psi_2$ und seiner euklidischen Länge $\|\psi_1 \times \psi_2\|$ im $\mathbb{R}^3$ als Flächeninhalt des von den beiden Vektoren ψ_j , $j = 1, 2$, aufgespannten Parallelogramms führen zu der Feststellung, das die Bilder von kleinen Rechtecken $R \subset Q$ mit den Seitenlängen r und s, $R = q + [0, r] \times [0, s]$, also $\mathrm{Vol}_2(R) = \|re_1 \times se_2\| = rs$ angenähert den Wert $\|r\psi_1(q) \times s\psi_2(q)\| = rs\,\|\psi_1(q) \times \psi_2(q)\|$ als den neuen Flächeninhalt erhalten sollten. Dabei ist wie zuvor $\psi_i(q) := \partial_i \psi(q)$, $i = 1, 2$, die durch die Parametrisierung ψ gegebene Basis des Tangentialraums von S im Punkte $\psi(q)$.

Im Grenzübergang führt das zu dem Ansatz

$$\lambda_S(A) = \int_Q \chi_A \circ \psi(q)\,\|\psi_1 \times \psi_2(q)\|\;d\lambda_2(q).$$

Wir erinnern an $\|\psi_1 \times \psi_2\|^2 = \det(g_{ij})$, wobei (g_{ij}) der Maßtensor mit den Komponenten $g_{ij}(q) = \langle \psi_i(q), \psi_j(q)\rangle$ ist.

(51.1) Satz – Definition: Durch

$$\lambda_S(A) = \int_Q \chi_A \circ \psi(q)\sqrt{\det(g_{ij}(q))}\,d\lambda_2(q)$$

wird ein Maß auf $\mathcal{L}_S$ definiert, das unabhängig von der Parametrisierung ψ ist. [22.1.08]

Es gilt also für eine weitere topologische, stetig differenzierbare Immersion $\overline{\psi} : \overline{Q} \to S$ zu zeigen, dass

$$\int_Q \chi_A \circ \psi(q)\sqrt{\det(g_{ij}(q))}\,d\lambda_2(q) = \int_{\overline{Q}} \chi_A \circ \overline{\psi}(\overline{q})\sqrt{\det(\overline{g}_{ij}(\overline{q}))}\,d\lambda_2(\overline{q})$$

zutrifft. Diese Identität folgt aus dem Transformationssatz, denn für den $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\Phi := \psi^{-1} \circ \overline{\psi} : \overline{Q} \to Q$ liefert die Kettenregel

$$\det(\overline{g}_{ij}(\overline{q})) = \det(g_{kl}(\Phi(\overline{q}))\,(\det D\Phi(\overline{q}))^2\,.$$

(51.2) Folgerung: Die Integration von Funktionen $f : S \to E$ erfolgt über die Formel

$$\int_S f\,d\lambda_S = \int f\,d\lambda_S = \int_Q f \circ \psi\sqrt{\det(g_{ij})}\,d\lambda_2\,.$$

Das Integral ist das *Oberflächenintegral*.

(51.3) Beispiel: Oberfläche der 2-Sphäre $\mathbb{S}^2_R$ vom Radius R durch Bestimmung der Oberfläche der Halbsphäre S mit der Parametrisierung $\psi : Q \to S$, $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, wobei $Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$:

$$g_{11} = \left\langle (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}), (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}) \right\rangle = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}\,,$$

$$g_{12} = \left\langle (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}), (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}) \right\rangle = \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2}\,,$$

$$g_{22} = 1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}\,.$$

$$\det(g_{ij}) = (R^2 - x^2 - y^2)^{-2}\left((R^2 - y^2)(R^2 - x^2) - x^2y^2\right) = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}\,.$$

Daher folgt

$$\lambda_{\mathbb{S}^2_R}(S) = \int_{\{x^2+y^2\le R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,drd\varphi\,,$$

und schließlich

$$\lambda_{\mathbb{S}^2_R}(S) = 2\pi R\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = 2\pi R\left(-\sqrt{R^2-r^2}\,\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = 2\pi R^2\,.$$

Deshalb ist $\lambda_{\mathbb{S}^2_R}(\mathbb{S}^2_R) = 4\pi R^2$ die Oberfläche der 2-Sphäre vom Radius R.

(51.4) Bemerkung: Auf dieselbe Weise wie 51.1 / 51.2 übertragen sich Maß und Integral auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension: Wenn nur $\psi : Q \to \mathbb{R}^n$ eine topologische $\mathcal{C}^1$-Immersion ist auf einer offenen Menge $Q \subset \mathbb{R}^k$, $k < n$, $M = \psi(Q)$ (solch eine Abbildung ψ wird auch eine $\mathcal{C}^1$-*Einbettung* genannt), so hat man ja den Maßtensor

$$g_{ij}(q) = \langle \partial_i\psi(q), \partial_j\psi(q)\rangle\ ,\ 1\le i,j\le k\,,$$

auf der Mannigfaltigkeit M, und dieselben Formeln wie in 51.1 und 51.2 liefern Maß und Integration, unabhängig von der Parametrisierung:

$$\lambda_M(A) = \int_Q \chi_A\circ\psi(q)\sqrt{\det(g_{ij})}\,d\lambda_k(q)\,,$$

für messbare $A\subset M$, und

$$\int_M f\,d\lambda_M = \int f\,d\lambda_M = \int_Q f\circ\psi\sqrt{\det(g_{ij})}\,d\lambda_k\,,$$

für Funktionen $f : S \to E$.

(51.5) Bemerkung: Es gilt für $\psi = (\psi^1,\psi^2,\psi^3) : Q \to S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\det(g_{ij}) = \left(\frac{\partial(\psi^1,\psi^2)}{\partial(q^1,q^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^2,\psi^3)}{\partial(q^1,q^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^3,\psi^1)}{\partial(q^1,q^2)}\right)^2\ ,$$

dabei ist $\frac{\partial(\psi^1,\psi^2)}{\partial(q^1,q^2)}$ die Determinante der Jacobimatrix zu $(\psi^1,\psi^2) : Q \to \mathbb{R}^2$, also $\det D(\psi^1,\psi^2)$, etc.

Mit diesem Ausdruck erweist sich die Formel in 51.1 für den Inhalt

$$\lambda_S(S) = \int_Q \sqrt{\left(\frac{\partial(\psi^1,\psi^2)}{\partial(q^1,q^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^2,\psi^3)}{\partial(q^1,q^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\psi^3,\psi^1)}{\partial(q^1,q^2)}\right)^2}\,d\lambda_2$$

als eine direkte Verallgemeinerung der Kurvenlänge

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma\|\ dt = \int_a^b \sqrt{(\dot\gamma^1(t))^2 + (\dot\gamma^2(t))^2 + (\dot\gamma^3(t))^2}\,dt\,.$$

Das gilt auch analog für das Integral.

In Analogie zum Wegintegral $\int_\gamma \langle F, dx\rangle$ im Eindimensionalen wird auch über Flächen ein Integral von Vektorfeldern über die Fläche S eingeführt. Im Spezialfall, kommt das bereits im

Integralsatz von Green vor.

(51.6) Definition: Ist $F = (P, Q, R) : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, so setze

$$\int_S P\,dy \wedge dz := \int_Q P \circ \psi(q) \frac{\partial(\psi^2, \psi^3)}{\partial(q^1, q^2)}(q)\,d\lambda_2(q)\,,$$

$$\int_S Q\,dz \wedge dx := \int_Q Q \circ \psi(q) \frac{\partial(\psi^3, \psi^1)}{\partial(q^1, q^2)}(q)\,d\lambda_2(q)\,,$$

$$\int_S R\,dx \wedge dy := \int_Q R \circ \psi(q) \frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)}(q)\,d\lambda_2(q)\,.$$

Dann wird die Summe dieser drei Integrale (falls die rechten Seiten alle drei im lebesgueschen Sinne existieren) mit

$$\int_S P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$$

bezeichnet und das *Oberflächenintegral von F über S* genannt.

Man kann das Integral auch in der Form $\int_S \langle F, do\rangle$ schreiben und erhält damit eine formale Analogie zu den bekannten Wegintegralen $\int_\gamma \langle F, dx\rangle$.

Damit das Sinn gibt, muss nach die Unabhängigkeit von der Parametrisierung ψ gezeigt werden. Sie gilt nicht total sondern nur bis auf Vorzeichen, welches davon abhängt, ob der Parameterwechsel orientierungstreu ist oder nicht. Trotzdem erlaubt man sich, das Integral in Abhängigkeit von S zu schreiben, im Kontext wird jeweils klar, wie mit dem Vorzeichen umzugehen ist. Oft genug beschränkt man sich auf orientierungstreue Koordinatenwechsel.

(51.7) Satz: *Die Definition 51.6 ist unabhängig gegenüber Parameterwechsel bis auf Vorzeichen, das durch die Orientierung des Parameterwechsels bestimmt wird. Das Vorzeichen ist „$+$", wenn die Determinante von $F = \psi^{-1} \circ \overline{\psi}$ positiv ist, und „$-$" wenn sie negativ ist.* [25.1.08]

Es ist sinnvoll, den Parameterbereich Q als zusammenhängend vorauszusetzen, weil dann nur zwei Werte insgesamt für das Integral möglich sind.

Andere Schreibweise:

(51.8) Satz: *Es gilt*

$$\int_S P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy = \int_Q \langle F \circ \psi(q), \psi_1 \times \psi_2(q)\rangle\ d\lambda_2(q)\,.$$

Rückführung auf das bereits vorher eingeführte Oberflächenintegral über den Normaleneinheitsvektor

$$\nu(q) := \frac{\psi_1(q) \times \psi_2(q)}{\|\psi_1(q) \times \psi_2(q)\|}\ :$$

(51.9) Folgerung: Es gilt

$$\int_S P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy = \int_S \langle F, \nu\rangle\ d\lambda_S\,.$$

Die Normalenrichtung in einem Punkte $p \in S$ der Fläche S, also der eindimensionale Raum N_pS ist durch $\nu(q)\,,\ \psi(q) = p$, gegeben: $N_pS = \mathbb{R}\nu(q)$. Es gibt genau 2 Normaleneinheitsvektoren $\pm\nu(q)$ im Punkte p an die Fläche S, und je nach Orientierung der Parametrisierung ψ

wird durch $\nu(q)$ ein vorgegebener Normalenvektor gegeben oder durch $-\nu(q)$: Für eine weitere (topologische immersive $\mathcal{C}^1$-) Parametrisierung $\overline{\psi} : \overline{Q} \to S$ mit $p = \overline{\psi}(\overline{q})$ gilt $\nu(q) = \overline{\nu}(\overline{q})$, wenn $\det D(\psi^{-1} \circ \overline{\psi})(\overline{q}) > 0$ und es gilt gilt $\nu(q) = -\overline{\nu}(\overline{q})$, wenn $\det D(\psi^{-1} \circ \overline{\psi})(\overline{q}) < 0$.

Die Vorzeichenmehrdeutigkeit der Normalen ist also dieselbe wie die des neuen Integrals, wie sich aus der Formel in 51.9 ablesen lässt.

(51.10) Satz: (Der Stokessche Integralsatz für Flächen) *Die Einbettung $\psi : Q \to S \subset \mathbb{R}^3$ sei zweimal stetig differenzierbar. Es sei $B \subset Q \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter Bereich, dessen Rand eine stückweise stetig differenzierbare und reguläre Parametrisierung hat. Sei $\Omega := \psi(\mathring{B}) \subset S$ und sei γ eine stückweise reguläre $\mathcal{C}^1$-Parametrisierung des Randes $\partial\Omega$ mit der richtigen Orientierung. Sei $F = (P, Q, R) : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, welches die Restriktion eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes auf einer offenen Umgebung von S ist. Dann gilt*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

Man erkennt den Satz von Green 50.3, wenn man alles als von z unabhängig ansieht. Das heißt konkret: $\psi(x, y) = (x, y, 0)$ und $S = Q \times \{0\}$ ist die durch Q gegebene ebene Fläche. Umgekehrt kann man sich vorstellen, dass der Satz 51.10 aus dreifacher Anwendung des Integralsatzes von Green 50.3 besteht.

Beweis. Sei $\alpha := \psi^{-1} \circ \gamma$ die entsprechende Parametrisierung von ∂B, also $\gamma = \psi \circ \alpha$. Wir konzentrieren uns auf den Term $\int_\gamma P dx$ und setzen $u := P \circ \psi$. Dann ist

$$\int_\gamma P dx = \int_a^b P(\gamma(t))\dot{\gamma}^1(t)\,dt = \int_a^b P(\gamma(t))\frac{d}{dt}(\psi^1 \circ \alpha)(t)\,dt = \int_a^b u(\alpha(t))\psi^1_j\dot{\alpha}^j(t)\,dt = \int_\alpha u\psi^1_1\,dq^1 + u\psi^1_2\,dq^2\,.$$

Wir wenden auf $\int_\alpha (u\psi^1_1)\,dq^1 + (u\psi^1_2)\,dq^2$ den Integralsatz von Green 50.3 an und erhalten

$$\int P dx = \int_\alpha (u\psi^1_1)\,dq^1 + (u\psi^1_2)\,dq^2 = \int_B \left(\partial_1(u\psi^1_2) - \partial_2(u\psi^1_1)\right) d\lambda_2\,.$$

Um das gewünschte Ergebnis zu erzielen, muss noch der Integrand im letzten Integral geeignet umformuliert werden: Es ist $\partial_1(u\psi^1_2) = \partial_1(P \circ \psi)\,\psi^1_2 + P \circ \psi\,\partial_1\psi^1_2 = \sum_{k=1}^3 (\partial_k\,P)\psi^k_1\,\psi^1_2 + P \circ \psi\,\partial_1\psi^1_2$ und $\partial_2(u\psi^1_1) = \sum_{k=1}^3 (\partial_k\,P)\psi^k_2\,\psi^1_1 + P \circ \psi\,\partial_2\psi^1_1$. Weil ψ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird, ist $\partial_2\psi^1_1 = \partial_1\psi^1_2$. Der Integrand hat also die Form:

$$\sum_{k=1}^3 (\partial_k\,P)(\psi^k_1\,\psi^1_2 - \psi^k_2\,\psi^1_1)\,.$$

$\sum_{k=1}^3 (\partial_k\,P)(\psi^k_1\,\psi^1_2 - \psi^k_2\,\psi^1_1) = \partial_1 P(\psi^1_1\,\psi^1_2 - \psi^1_2\,\psi^1_1) + \partial_2 P(\psi^2_1\,\psi^1_2 - \psi^2_2\,\psi^1_1) + \partial_3 P(\psi^3_1\,\psi^1_2 - \psi^3_2\,\psi^1_1)$, also ist der Integrand

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(q^1, q^2)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(\psi^3, \psi^1)}{\partial(q^1, q^2)}\,.$$

Damit ist nach Definition 51.6 die Identität

$$\int_\gamma P\,dx = \int -\frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy + \int \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx$$

gezeigt. Analog verfährt man mit $\int_\gamma Q\,dy$ und $\int_\gamma R\,dy$, um das Ergebnis schließlich durch Aufsummieren zu erhalten. □

(51.11) Definition: Rotation. Für ein Vektorfeld F wie im Satz 51.10 setzt man

$$\mathrm{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) .$$

Man erhält die folgende Formulierung des Satzes 51.10:

(51.12) Integralsatz:

$$\int_\Omega \langle \mathrm{rot}\, F, \nu \rangle \; d\lambda_S = \int_{\partial\Omega} \langle F, dx \rangle \; .$$

§52 Der Integralsatz von Gauß

(52.1) Satz: (Integralsatz von Gauß für Rechtecke) *Sei* $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ *ein kompakter Quader und es sei* $F : Q \to \mathbb{R}^n$ *ein* $\mathcal{C}^1$*-Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_R \mathrm{div}\, F \, d\lambda_n = \int_{\partial R} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S \, ,$$

wobei N *die* äußere Normale auf ∂R *ist und* $\mathrm{div}\, F := \partial_k F^k$ *die* Divergenz.

(52.2) Definition: Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $a \in \partial B$.

1° a heißt *regulärer Randpunkt*, wenn es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $u : V \to \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla u(x) \neq 0$ für alle $x \in V$, so dass

$$B \cap V = \{x \in V : u(x) \leq 0\} \, .$$

Es gilt dann $\partial B \cap V = u^{-1}(0)$, und diese Menge ist $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Ansonsten heißt a *singulär*.

2° $\partial_r B := \{a \in \partial B : a \text{ regulär}\}$, $\partial_s B := \partial B \setminus \partial_r B$. $\partial_r B$ ist $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine Hyperfläche.

3° B ist $\mathcal{C}^1$*-Polyeder*, wenn $\partial_s B$ eine $(n-1)$-Nullmenge ist. N ist eine $(n-1)$*-Nullmenge* (vgl. Hausdorffmaß), wenn

$$\inf\{\sum_{k=1}^\infty r_k^{n-1} \,|\, \exists b_k \in \mathbb{R}^n : N \subset \bigcup_{k=0}^\infty (b_k + [0, r_k]^n)\} = 0 \, .$$

Zum Beispiel sei N in der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = M$ enthalten. Dann ist N genau dann $(n-1)$-Nullmenge, wenn N als Teilmenge der $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit M eine Nullmenge ist (dh. alle Bilder von N unter allen Karten sind Nullmengen in $\mathbb{R}^{n-1}$). Analog für beliebige Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^n$.

4° Das *äußere Normalenfeld* $N : \partial_r B \to \mathbb{R}^n$ ist folgendermaßen festgelegt: $N(a)$ ist der eindeutig bestimmte Normalenvektor zu $a \in \partial_r B$, zu dem es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $t \in]0, \varepsilon[$ stets

$$\begin{aligned} a + t\,N(a) &\notin B \, , \\ a - t\,N(a) &\in B \, , \\ T_a(\partial_r B) &\perp N(a) \, . \end{aligned}$$

Es ist

$$N(a) = \frac{\nabla u(a)}{\|\nabla u(a)\|} \,,$$

wenn immer u die in 1° genannten Eigenschaften hat.

(52.3) Integralsatz von Gauß: $B \subset \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{C}^1$-Polyeder mit messbaren Rand. Dann gilt für $\mathcal{C}^1$-Vektorfelder $F : B \to \mathbb{R}^n$:

$$\int_B \operatorname{div} F \, d\lambda_n = \int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S \;,\; (S = \partial_r B) \,.$$

(52.4) Interpretation: Es sei $F : B \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen, strömenden Flüssigkeit. Die *mittlere Ergiebigkeit* innerhalb eines Quaders $R \subset B$ (die Summe dessen, was hinein fließt und was heraus fließt in Relation zum Volumen) ist

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}_3(R)} \int_{\partial R} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S \,.$$

Im Falle, dass man R gegen einen Punkt konvergieren lässt, ergibt sich bereits aus (52.1) (und auch aus dem Satz von Gauß) der Wert

$$\lim_{R \to p} \frac{1}{\operatorname{Vol}_3(R)} \int_{\partial R} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S = \lim_{R \to p} \frac{1}{\operatorname{Vol}_3(R)} \int_B \operatorname{div} F \, d\lambda_3 = \operatorname{div} F(p) \,.$$

Die Größe $\operatorname{div} F(p)$ wird daher auch die *Quelldichte* von F in p genannt. [29.1.08]

(52.5) Beispiele: $B \subset \mathbb{R}^n$ sie ein $\mathcal{C}^1$-Polyeder mit messbaren Rand.

1° $F(x) = x \,,\; x \in B$. Dann ist $\operatorname{div} F = n$ konstant und (52.3) liefert

$$\operatorname{Vol}_n(B) = \frac{1}{n} \int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S \,.$$

2° Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei

$$F(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|^n} \,,\; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \,.$$

Dann ist im Falle $a \in \mathring{B}$

$$\int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S \; = \omega_n \,,$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

Ansatz: $B_\varepsilon := B \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le \varepsilon\}$: Wegen $\operatorname{div} F = 0$ ist

$$0 = \int_{\partial_r B} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S - \int_{\partial B(a,\varepsilon)} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S \,.$$

Und $\int_{\partial B(a,\varepsilon)} \langle F, N \rangle \; d\lambda_S = \int_{\partial B(a,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \, d\lambda_S = \omega_n$.

§53 Differentialformen

In Arbeit.

M sei eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit der Dimension k. $\mathcal{E}(M)$ sei der kommutative Ring der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf M. $\mathfrak{V}(M)$ ist der $\mathcal{E}(M)$-Module der beliebig oft differenzierbaren Vektorfelder auf M. Eine Differentialform auf M vom Grad p ist eine bezüglich $\mathcal{E}(M)$ p-multilineare und alternierende Abbildung $\omega : \mathfrak{V}(M)^p \to \mathcal{E}(M)$. Der Modul all dieser Differentialformen vom Grad p wird mit $\mathcal{A}^p(M)$ bezeichnet.

Zum Beispiel $df \in \mathcal{A}^1(M)$ für $f \in \mathcal{E}(M)$:

$$df(X) := Xf = L_X f\,,\ X \in \mathfrak{V}(M)\,.$$

In lokalen Koordinaten durch eine Karte $\varphi : U \to Q,\ Q \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi = (q^1, \dots, q^k)$, hat jede Differentialform $\omega \in \mathcal{A}^p(M)$ die Darstellung

$$\omega|_U = \omega_{j_1,\dots,j_p}\, dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_p}$$

mit $\omega_{j_1,\dots,j_p}\, dq^{j_1} \in \mathcal{E}(U)$.

Die äußere Ableitung $d\omega \in \mathcal{A}^{p+1}(M)$ von $\omega \in \mathcal{A}^p(M)$ wird durch diese lokale Darstellungen in folgender Wiese gegeben

$$d\omega|_U = d\omega_{j_1,\dots,j_p} \wedge dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_p}\,.$$

§54 Integration von Differentialformen. Orientierung

(54.1) 1. Schritt: Es sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ eine Differentialform vom höchsten Grad. Dann ist ω von der Gestalt

$$\omega = f\, dq^1 \wedge \dots \wedge dq^k$$

und das Integral wird durch

$$\int_M \omega := \int_M f\, d\lambda_k$$

definiert, soweit f integrierbar ist.

Bemerkung: Nach Definition der Differentialformen ist f beliebig oft differenzierbar. Wenn M beschränkt ist oder wenn f kompakten Träger hat, ist f also integrierbar.

Natürlich werden auch allgemeinere Koeffizientenfunktionen anstelle von f zugelassen.

Wir interessieren uns für das Transformationsverhalten unter einem $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\Phi : \overline{M} \to M$, wobei $\overline{M}$ eine weitere offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ ist. Der Transformationssatz liefert für integrierbare $f : M \to \mathbb{R}$ die Formel

$$\int_M f\, d\lambda = \int_{\overline{M}} f \circ \Phi\, |\det D\Phi|\ d\lambda\,.$$

Für $\omega = f\, dq^1 \wedge \dots \wedge dq^k$ ist

$$\Phi^*\omega = (f \circ \Phi)\,(\det D\Phi)\, d\overline{q}^1 \wedge \dots \wedge d\overline{q}^k \in \mathcal{A}^k(\overline{M})\,.$$

Das haben wir weiter oben bereits festgestellt, die Formel folgt aus den Eigenschaften der Determinante oder ganz explizit aus

$$\Phi^*\omega = (f \circ \Phi)\,(\Phi^* dq^1 \wedge \dots \wedge \Phi^* dq^k)$$

zusammen mit $\Phi^* dq^j = \frac{\partial \Phi^j}{\partial \overline{q}^i}\, d\overline{q}^i$ und diese Identität wiederum ergibt sich direkt aus der Definition von Φ^*:

$$\Phi^* dq^j \left(\frac{\partial}{\partial \overline{q}^m}\right) = dq^j \left(D\Phi . \frac{\partial}{\partial \overline{q}^m}\right) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial \overline{q}^m} .$$

Damit haben wir für zusammenhängende M gezeigt:

(54.2) Lemma:

$$\int_M \omega = \operatorname{sign}(\det D\Phi) \int_{\overline{M}} \Phi^* \omega .$$

(54.3) 2. Schritt: Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit einer Karte $\varphi : U \to Q$ und einer Differentialform $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, die ihren Träger in U hat. Dann wird definiert ($\psi = \varphi^{-1}$):

$$\int_\psi \omega := \int_Q \psi^* \omega .$$

[5.2.2008]

Für eine weitere Parametrisierung $\overline{\psi} : \overline{Q} \to U \subset M$ ist der Kartenwechsel

$$\Phi = \varphi \circ \overline{\psi} : \overline{Q} \to Q$$

ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus, also gilt (für zusammenhängende U):

(54.4) Lemma:

$$\int_\psi \omega = \pm \int_{\overline{\psi}} \omega$$

und das Vorzeichen wird durch das Vorzeichen von $\det D\Phi$ bestimmt.

Denn nach 54.2 ist $\int_\psi \omega = \int_Q \psi^* \omega = \pm \int_{\overline{Q}} \Phi^* \psi^* \omega$. Wegen $\Phi^* \psi^* \omega = (\psi \circ \Phi)^* \omega$ und $\psi \circ \Phi = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \overline{\psi} = \overline{\psi}$ folgt $\Phi^* \psi^* \omega = \overline{\psi}^* \omega$ und damit die Behauptung.

(54.5) Der eindimensionale Fall: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann hat $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ die Form $\omega = F^1\, dq^1 + \ldots + F^n\, dq^n$ und zu einer stetig differenzierbaren Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to U$ von $U \subset M$ gilt wegen $\gamma^*(dq^j) = dq^j(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma}^j\, dt$

$$\gamma^* \omega = \sum_{j=1}^n (F^j \circ \gamma)\, \dot{\gamma}^j\, dt .$$

Daher ist im Sinne des neuen Integrals

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(F^1(\gamma(t))\dot{\gamma}^1(t) + \ldots + F^n(\gamma(t))\dot{\gamma}^n(t)\right) dt ,$$

also stimmt das neue Integral mit dem alten Wegintegral überein:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (F^1\, dq^1 + \ldots + F^n\, dq^n) = \int_\gamma \langle F, dq \rangle .$$

Analog hat man die Integration von p-Formen $\omega \in \mathcal{A}^p(M)$ über (oder „längs“) p-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $N \subset M$ einer Mannigfaltigkeit.

Aber wie kommt man von einer Karte auf die Gesamtheit der Mannigfaltigkeit, insbesondere unter Berücksichtigung des Vorzeichenwechsels bei einigen Koordinatentransformationen? Dazu wird die Orientierung gebraucht und weiterhin ist es nötig sein die Teilungen der Eins auf der Mannigfaltigkeit einzuführen ujnd zu verwenden.

(54.6) Definition: (Orientierung)

1° Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Wahl einer geordneten Basis $b_1, \ldots, b_n$ ist eine *Orientierung* von V. Eine weitere solche Basis $a_1, \ldots, a_n$ legt definitionsgemäß die gleiche Orientierung fest, wenn die durch $F(a_i) := b_i$ gegebene lineare Abbildung eine positive Determinante hat. V hat genau zwei Orientierungen. Diese lassen sich auch als Äquivalenzklassen von geordneten Basen von V verstehen.

2° Die Mannigfaltigkeit M ist *orientiert*, wenn jeder Tangentialraum T_aM , $a \in M$, orientiert ist, und die Orientierungen differenzierbar zusammenpassen: Für jede zusammenhängende Karte $\varphi : U \to Q$ der Mannigfaltigkeit mit der Parametrisierung $\psi = \varphi^{-1}$ gilt die folgende Alternative:

i) entweder stimmt $\psi_1(q), \ldots, \psi_k(q)$ für alle $q \in Q$ mit der vorgegebenen Orientierung von $T_{\psi(q)}M$ überein,

ii) oder diese Basis $\psi_1(q), \ldots, \psi_k(q)$ legt stets die entgegengesetzte Orientierung fest.

Im ersten Falle heißt die Karte eine *orientierte Karte*.

(54.7) Bemerkungen:

1° Eine Orientierung auf M wird durch einen Atlas $(\varphi_\iota : U_\iota \to Q_\iota)_{\iota \in I}$ gegeben, für den stets gilt: Im Falle $U_\iota \cap U_\kappa \neq \emptyset$ ist $\det D(\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}) > 0$. Und jede Orientierung der Mannigfaltigkeit liefert einen solchen Atlanten, den wir einen *orientierten Atlas* nennen.

2° Das Möbiusband als Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist nicht orientierbar.

3° M ist genau dann orientierbar, wenn es eine k-Form $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ($\dim M = k$) gibt, die nirgends verschwindet: $\omega(a) \neq 0$ für alle $a \in M$.

4° Im Falle eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{k+1}$ gilt: M ist orientierbar, wenn es ein stetiges Vektorfeld $N : M \to \mathbb{R}^{k+1}$ gibt, so dass für alle $a \in M$ stets gilt: $N(a) \neq 0$ und $N(a) \perp T_aM$.

5° Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit hat höchstens zwei Orientierungen.

Die wichtigen Eigenschaften einer Untermannigfaltigkeit lassen sich mit Hilfe der Atlanten formulieren. Atlanten sind auch grundlegend für den Begriff der allgemeinen abstrkaten Mannigfaltigkeit.

(54.8) Definition: (Mannigfaltigkeit)

1° Eine (abstrakte) $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit M der Dimension k ist ein separabler metrischer Raum mit einem Atlas $(\varphi_\iota : U_\iota \to Q_\iota)_{\iota \in I}$ (d.h. φ_ι topologisch, die Q_ι sind offene Mengen $Q_\iota \subset \mathbb{R}^k$ und $M = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$) für den stets gilt: Im Falle $U_\iota \cap U_\kappa \neq \emptyset$ ist $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus.

2° M ist orientiert durch solch einen Atlas, wenn die Ableitung des Kartenwechsels immer positive Determinante hat.

3° $f : M \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{C}^\infty$, wenn alle $f \circ \varphi_\iota^{-1} : Q_\iota \to \mathbb{R}^m$ beliebig oft differenzierbar sind. Ebenso für Banachräume E anstelle von $\mathbb{R}^m$.

4° Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten heißt beliebig oft differenzierbar, wenn f stetig ist und wenn bezüglich eines Atlanten $(\psi_\kappa : V_\kappa \to P_\kappa)_{\kappa \in K}$ von N alle

$\phi_\kappa \circ f : f^{-1}(V_\kappa) \to p_\kappa$ beliebig oft differenzierbar sind.

(54.9) Lemma: Eine Mannigfaltigkeit M besitzt eine $\mathcal{C}^\infty$-Teilung der Eins zu jedem vorgegebenen Atlas $(\varphi_\iota : U_\iota \to Q_\iota)_{\iota \in I}$. Das ist eine Kollektion $\eta_\iota : M \to \mathbb{R}$ von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf M mit:

$\eta_\iota \geq 0$,

η_ι ist lokal endlich, das bedeutet, dass jeder Punkt $a \in M$ eine Umgebung V hat, für die $\{\iota \in I \mid \exists\, x \in V : \eta(x) \neq 0\}$ endlich ist,

$\sum_{\iota \in I} \eta_\iota = 1$ (die Summe ist punktweise endlich),

für alle $\iota \in I$ ist der Träger $\operatorname{Tr} \eta_\iota$ kompakt und liegt in U_ι.

(54.10) 3. Schritt: M sei orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension k mit einem orientierten Atlas $(\varphi_\iota : U_\iota \to Q_\iota)_{\iota \in I}$ und einer zugehörigen Teilung der Eins. Für $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ gilt

1° $\int_{\psi_\iota} \eta_\iota \omega := \int_M \eta_\iota \omega$ ist definiert ohne Mehrdeutigkeit.

2° $\int_M \omega := \sum \int_M \eta_\iota \omega$, falls die rechte Summe existiert.

Bemerkung: Alles unabhängig von der Wahl des orientierten Atlanten und der Teilung der Eins. Das ist mit 1° gemeint.

§55 Der allgemeine Stokessche Integralsatz

M sei in diesem abschließenden Paragrafen eine orientierte $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit der Dimension $k \geq 1$ und $\Omega \subset M$ sei eine offene Teilmenge mit kompakten Abschluss $\overline{\Omega} \subset M$.

(55.1) Satz von Stokes: Ω *habe einen „glatten“* [1] *Rand. Für* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ *gilt dann stets*

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega\,.$$

(„glatter“ Rand impliziert, dass $\partial\Omega$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M ist mit einer Orientierung, die zur Orientierung von M passt. Das gilt es im Folgenden zu erklären.)

(55.2) Wiedersehen: 1° Es seien $\Omega, M \subset \mathbb{R}^2$ offene Teilmengen mit $\overline{\Omega} \subset M$. Jede 1-Form $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ hat die Darstellung $\omega = Pdx + Qdy$ und es ist $d\omega = (Q_x - P_y) dx \wedge dy$. 55.1 bedeutet also

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_\Omega (Q_x - P_y)\, dxdy\,.$$

Das ist die Folgerung im Satz von Green 50.3. Da 55.1 ohne spezielle Einbettung formuliert ist, folgt entsprechend auch der Satz 51.10 (Stokesscher Satz für Flächen im Raum $\mathbb{R}^3$) aus 55.1, jedenfalls für Ω mit glattem Rand.

2° Ähnlich kann man den Satz von Gauß 52.3 auf 55.1 zurückführen. Man beachte, dass ein Vektorfeld $F = (F^1, \ldots, F^n)$ eine $(n-1)$-Form

$$\omega_F = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} F^j\, (dq^1 \wedge \ldots \hat{dq^j} \ldots \wedge dq^n)$$

[1] vgl. Definition 55.4

definiert mit

$$d\omega_F = (\operatorname{div} F)\, dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n \,.$$

(55.3) Spezialfall: Es sei $M = \mathbb{R}^k$ und $\Omega = \{q \in \mathbb{R}^k : q^1 < 0\}$ mit dem Halbraum $H^k = \overline{\Omega}$ und dem Rand

$$\partial\Omega = \partial H^k = \{q \in \mathbb{R}^k : q^1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \cong \mathbb{R}^{k-1} \,.$$

Für die Parametrisierung

$$\psi : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial\Omega \,,\ (q^2, \ldots, q^k) \mapsto (0, q^2, \ldots, q^k) \,,$$

des Randes $\partial\Omega$ gilt für jede Differentialform $\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ mit kompakten Träger:

$$\int_\Omega d\omega = \int_\psi \omega \,.$$

Beweis: Dies ist der wesentliche Teil des Beweises von 55.1!

Die Differentialformen $\beta^j := dq^1 \wedge \ldots \hat{dq^j} \wedge \ldots \wedge dq^k$ bilden eine Basis von $\mathcal{A}^{k-1}(M)$ über $\mathcal{E}(M)$. Also kann die Differentialform ω in folgender Weise eindeutig dargestellt werden:

$$\omega = \sum_{j=1}^k a_j \beta^j = \sum_{j=1}^k a_j\, dq^1 \wedge \ldots \hat{dq^j} \wedge \ldots \wedge dq^k \,,$$

wobei $a_j \in \mathcal{E}(M)$. Es folgt

$$d\omega = \sum_{j=1}^k da_j \wedge dq^1 \wedge \ldots \hat{dq^j} \ldots \wedge dq^k = \sum_{i,j=1}^k \partial_i a_j dq^i \wedge dq^1 \wedge \ldots \hat{dq^j} \ldots \wedge dq^k \,,$$

also

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \partial_j a_j \right) dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^k \,, .$$

Es folgt

$$\int_\Omega d\omega = \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \partial_j a_j \right)\ d\lambda_k$$

entsprechend der Definition 54.1 (1. Schritt). Nach Satz von Fubini gilt

$$\int_\Omega \partial_1 a_1 d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \partial_1 a_1(q)\, dq^1 \right) d\lambda_{k-1} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0,q)\, d\lambda_{k-1}(q) \,,$$

weil a_1 kompakten Träger hat. Wieder nach dem Satz von Fubini ist für $j \geq 2$:

$$\int_\Omega \partial_j a_j\, d\lambda_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^\infty \partial_j a_j\, dq^j \right)\ d\lambda_{k-1} = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} 0\, d\lambda_{k-1} = 0 \,,$$

weil auch a_j kompakten Träger hat. Insgesamt erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0,q)\, d\lambda_{k-1}(q) \,.$$

Mit der Parametrisierung $\psi : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial\Omega\,,\ (q^2,\ldots,q^k) \mapsto (0,q^2,\ldots,q^k)$, berechnen wir im Folgenden $\int_\psi \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \psi^*\omega$. Es ist $\psi^*(dq^1) = 0$ und $\psi^*(dq^j) = dq^j$ für $j \geq 2$, also ist $\psi^*(\beta^1) = \beta^1 = dq^2 \wedge \ldots \wedge dq^k$ und $\psi^*(\beta^j) = 0$ für $j \geq 2$. Daher ist

$$\int_\psi \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \psi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1 \circ \psi \beta^1 = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0,q)\, d\lambda_{k-1}\,.$$

Es folgt die Behauptung

$$\int_\Omega d\omega = \int_\psi \omega\,.$$

□

Die Parametrisierung ψ induziert also die „richtige“ Orientierung auf der Mannigfaltigkeit $\partial\Omega$. Der Rand $\partial\Omega$ ist „glatt“ und durch ψ orientiert. Daher:

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

in der durch ψ gegebenen Orientierung.

Jetzt passen wir die Definition so an, dass der Spezialfall – modulo Überlegungen mit der Teilung der Eins – bereits unser Resultat 55.1 sichert:

(55.4) Definition: Ω hat einen glatten Rand, wenn für jeden Punkt $a \in \partial\Omega$ eine orientierte Karte $\varphi : U \to Q$ von M mit $a \in U$ existiert, so dass $\varphi(\overline{\Omega} \cap U) = H^k \cap Q$ gilt. Skizze!

Es gilt dann auch $\varphi(\partial\Omega \cap U) = \partial H^k \cap Q = Q \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1})$, und daher ist $\partial\Omega$ eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Orientierung (durch $(q^2,\ldots,q^k) \mapsto \varphi^{-1}(0,q^2,\ldots,q^k)$).

Beweis des Satzes 55.1: Die Differentialform ω habe zunächst ihren Träger ganz in U in Bezug auf eine orientierte Karte $\varphi : U \to Q$, wie sie in 55.4 beschrieben ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Spezialfall. Der allgemeine Fall wird mit Hilfe einer Teilung der Eins auf diesen Fall zurückgeführt:

$$\int_\Omega d\omega = \sum_{\iota\in I} \int_{U_\iota} \eta_\iota d\omega = \sum_{\iota\in I} \int_{U_\iota} d(\eta_\iota\omega) = \sum_{\iota\in I} \int_{\partial\Omega} \eta_\iota\omega = \int_{\partial\Omega} \omega\,.$$

□ [08.02.08]

Abschließende Bemerkung: Der Integralsatz von Stokes kann in verschiedenr Hinsicht verallgemeinert werden. In vielen Anwendungen ist das auch nötig.

1. Die Bedingungen an den Rand von Ω können abgeschwächt werden, wie das ja bereits bei den Spezielfällen 50.3, 51.10 und 52.3 der Fall ist.

2. Die Differenzierbarkeitsbedingungen an ω können abgeschwächt werden. Das geht soweit, dass auch nicht differenzierbare Koeffizienten in den lokalen Darstellungen zugelassen sind.

3. Die Differenzierbarkeitsbedingungen an die Mannigfaltigkeit können abgeschwächt werden.